

## Mediciones II

### Objetivos

El alumno determinará la incertidumbre de las mediciones.

El alumno determinará las incertidumbres a partir de los instrumentos de medición.

El alumno determinará las incertidumbres en mediciones indirectas.

El alumno comparará la medición de una magnitud realizada en forma directa y en forma indirecta.

El alumno determinará las incertidumbres con métodos estadísticos.

### Introducción

Todas las mediciones tienen asociada una incertidumbre que puede deberse a los siguientes factores:

- la naturaleza de la magnitud que se mide,
- el instrumento de medición,
- el observador,
- las condiciones externas.

Cada uno de estos factores constituye por separado una fuente de incertidumbre y contribuye en mayor o menor grado a la incertidumbre total de la medida. La tarea de detectar y evaluar las incertidumbres no es simple e implica conocer diversos aspectos de la medición.

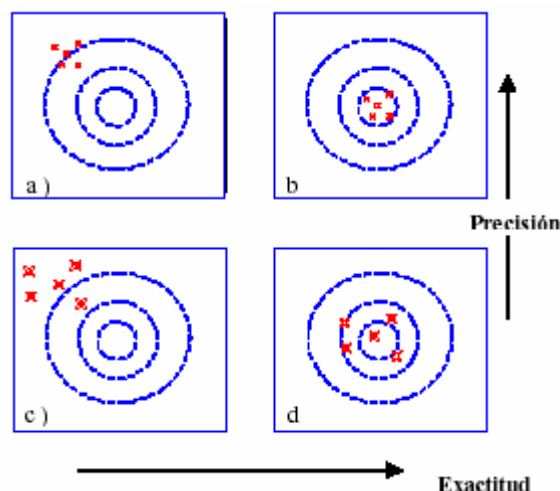
En principio, es posible clasificar las fuentes de incertidumbres en dos conjuntos bien diferenciados:

- **Errores accidentales o aleatorios** que aparecen cuando mediciones repetidas de la misma variable dan valores diferentes, con igual probabilidad de estar por arriba o por debajo del valor real. Cuando la dispersión de las medidas es pequeña se dice que la medida es precisa.
- **Errores sistemáticos** que son una desviación constante de todas las medidas ya sea siempre hacia arriba o siempre hacia abajo del valor real y son producidos, por ejemplo, por la falta de calibración del instrumento de medición.

En la figura 1 se representa el efecto de los errores sistemáticos y los errores aleatorios. Los centros de los círculos indican la posición del valor que se quiere medir y las cruces indican los valores de varias mediciones. La dispersión de los puntos se asocia a la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. El conjunto de medidas representa una medición a) precisa pero inexacta, b) más exacta y

con la misma precisión, c) menos precisa y menos exacta, d) más exacta pero menos precisa.

**La medida ideal** es aquella que tiene un 100% de exactitud y un 100% de precisión.



**Figura 1.** Ilustración esquemática de los conceptos de precisión y exactitud.

### Incertidumbre en medidas reproducibles

Cuando al realizar una serie de medidas de una misma magnitud se obtienen los mismos resultados, no se puede concluir que la incertidumbre sea cero; lo que sucede es que los errores quedan ocultos ya que son menores que la incertidumbre asociada al aparato de medición. En este caso, puede establecerse un criterio simple y útil: cuando las medidas son reproducibles, *se asigna una incertidumbre igual a la mitad de la división más pequeña del instrumento, la cual se conoce como resolución.*

Por ejemplo, si al medir con un instrumento graduado en mililitros repetidas veces el volumen de un recipiente se obtiene siempre 48 ml, la incertidumbre será 0.5 ml, lo que significa que la medición está entre 47.5 y 48.5 ml, a éste se le conoce como intervalo de confianza de la medición y su tamaño es el doble de la incertidumbre. Esto generalmente se aplica cuando se trata de aparatos de medición tales como reglas, transportadores, balanzas, probetas, manómetros, termómetros, etc.

### Incertidumbre en medidas no-reproducibles

Cuando se hacen repeticiones de una medida y estas resultan diferentes, con valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , surgen las preguntas:

- ¿Cuál es el valor que se reporta?
- ¿Qué incertidumbre se asigna al valor reportado?

La respuesta a estas preguntas se obtiene a partir del estudio estadístico de las mediciones, el cual debe arrojar la tendencia central de las mediciones y su dispersión.

### Medidas de tendencia central

La medida más común de la tendencia central de una muestra o conjunto de mediciones está dada por el promedio o media aritmética. Sin embargo, algunas veces este valor no basta y es necesario calcular otras variables estadísticas que ayuden a analizar el resultado de una medición. Estas variables estadísticas son la mediana y la moda .

#### El promedio

El promedio  $\bar{x}$  de una muestra o conjunto de mediciones  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  está dado por

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N)}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

#### La mediana

La mediana es el valor de la medición que divide la muestra en dos mitades: una mitad son aquellas mediciones menores a la mediana y la otra mitad es el conjunto de mediciones mayores que la mediana. Suponiendo que la muestra está ordenada de menor a mayor y cuando la muestra tiene un número impar de elementos, la mediana está dado por

$$mediana = x_{\frac{N+1}{2}}$$

Si la muestra tiene un número par de mediciones, la mediana está dada por

$$mediana = \frac{x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$$

#### La moda

La moda es la medición que ocurre con mayor frecuencia. En un conjunto de mediciones puede haber más de una moda.

Cuando el conjunto de mediciones es simétrico, el promedio y la mediana coinciden, sí además, los datos tienen una sola moda, se dice que los datos son unimodales y la mediana, la moda y el promedio tienen el mismo valor. Cuando la mediana no coincide

con el promedio, los datos están cargados o sesgados hacia la izquierda o hacia la derecha del promedio.

### Medidas de dispersión

La tendencia central no es suficiente para determinar el resultado de una medición, además es necesario conocer la dispersión de las mediciones, la cual se puede medir de diferentes maneras. Los indicadores más utilizados para representar la dispersión de un conjunto de datos son la desviación media y la desviación estándar.

#### La desviación media

La desviación media de una muestra está dada por

$$\bar{\delta} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$$

#### La desviación estándar

La desviación estándar de la muestra está dada por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Cuando se obtiene una medición de una muestra de datos, el valor central de la medición se representa con el promedio de los datos y el error o incertidumbre se representa con la desviación media cuando se trata de laboratorio introductorio, y con la desviación estándar para un tratamiento de datos más riguroso.

#### Regla para expresar una medida

Toda medida ya sea reproducible o no, debe de ir seguida por la unidad de la variable que se mide y se expresa de la forma

$$\bar{x} \pm \delta x \text{ [Unidades]}$$

donde  $\bar{x}$  representa el valor central de la medición y  $\delta x$  representa su incertidumbre. De manera que se entienda que la medición está comprendida dentro del intervalo

$$[\bar{x} - \delta x, \bar{x} + \delta x]$$

La interpretación de esto es que el mejor valor de la medida es  $\bar{x}$  y quien hizo las mediciones está razonablemente confiado de que sus mediciones caerán dentro del intervalo anterior.

## Representación absoluta y relativa de la incertidumbre

Tomando en cuenta que  $\delta x$  representa la incertidumbre absoluta y  $\bar{x}$  representa el valor central de la medición, entonces

$$\delta x / x$$

representa la incertidumbre relativa al valor central y

$$(\delta x / x) 100\%$$

representa la incertidumbre relativa porcentual.

## Mediciones directas e indirectas

A las cantidades que se obtienen utilizando un instrumento de medida se les denomina mediciones directas, y a las mediciones que se calculan a partir de mediciones directas se les denomina mediciones indirectas.

Por ejemplo el volumen que ocupa un líquido es una medición directa si se mide con una probeta graduada, y se considera como una medición indirecta si se obtiene de la medición de las dimensiones del recipiente que lo contiene.

## Propagación de la incertidumbre

Las mediciones directas, que pueden ser reproducibles y no reproducibles, tienen asociada una incertidumbre como se explicó anteriormente.

Las mediciones indirectas tienen asociada una incertidumbre que se origina de la propagación de la incertidumbre de las mediciones directas de las que se derivan.

## Propagación de la incertidumbre en la suma y en la diferencia

Si las magnitudes  $q$  y  $r$  se miden con incertidumbre  $\delta q$  y  $\delta r$  respectivamente, y si se utilizan para calcular la diferencia  $w = q - r$  entonces la incertidumbre asociada a la variable  $w$  es la suma de las incertidumbres asociadas a  $q$  y a  $r$ , es decir

$$\Delta w = \delta q + \delta r$$

Lo mismo es cierto cuando se calcula la suma  $w = q + r$ .

Este resultado nos indica que cuando se combinan dos variables mediante una suma o una resta, las incertidumbres siempre se suman.

### Propagación de errores en el producto y en el cociente

Si las cantidades  $q$  y  $r$  se han medido con una incertidumbre  $\delta q$  y  $\delta r$  respectivamente y si los valores de  $q$  y  $r$  se utilizan para calcular el producto  $w = qr$  ó el cociente  $w = \frac{q}{r}$ , entonces la incertidumbre asociada a  $w$ , esta dada por

$$\delta w = |w| \left( \frac{\delta q}{|q|} + \frac{\delta r}{|r|} \right)$$

Ejemplo, considérese la multiplicación

$$(1.317 \pm 0.001)(2.7 \pm 0.1) = 3.5559 \pm 3.5559 \left( \frac{0.001}{1.317} + \frac{0.1}{2.7} \right) = 3.5559 \pm 0.1344$$

Considérese ahora el cociente

$$\frac{46.5 \pm 0.1}{1.3 \pm 0.1} = 35.76923077 \pm 35.76923077 \left( \frac{0.1}{46.5} + \frac{0.1}{1.3} \right) = 35.76923077 \pm 2.828402367$$

En estos últimos resultados pueden verse cifras que no dan una información útil y es necesario un criterio para eliminarlas.

**Regla para reportar mediciones:** en un laboratorio introductorio, la incertidumbre se redondea a una cifra significativa, y esta incertidumbre debe de tener el mismo orden de magnitud que la cifra menos significativa del valor central.

De acuerdo con esto, los resultados de los ejemplos anteriores se deben de reportar como:

La suma

$$(62.03 \pm 0.01) + (1.7 \pm 0.1) = 63.7 \pm 0.1$$

El producto

$$(1.317 \pm 0.001)(2.7 \pm 0.1) = 3.6 \pm 0.1$$

La división

$$\frac{46.5 \pm 0.1}{1.3 \pm 0.1} = 36 \pm 3$$

## Cifras significativas

Una manera alternativa para reportar las mediciones es mediante el uso de las cifras significativas, que son aquellas que se conocen de manera razonablemente confiable; de este modo la incertidumbre está implícita en el último dígito y es igual a la mitad de una unidad del orden del dígito menos significativo.

Considérese, por ejemplo, que la longitud de un objeto se registró como 15.7 cm. Esto significa que la longitud se midió con una resolución de 0.1 cm (1 mm) y que su valor real cae entre 15.65 cm y 15.75 cm.

Si la medida se hiciera con resolución de 0.01 cm (0.1 mm), se tendría que haber registrado como 15.70 cm.

El valor 15.7 cm. representa una medición con tres cifras significativas (1, 5 y 7) mientras que el valor 15.70 cm. representa una medición con cuatro cifras significativas (1, 5, 7 y 0).

Considérese ahora el caso en que la masa de un objeto se reporta como 2.04763 kg y ha sido medida con una balanza de 0.1 gr de sensibilidad. Esta medición tiene cinco cifras significativas (2, 0, 4, 7 y 6). El tres, que corresponde a .01 gr, no puede leerse en esta balanza y por consiguiente no tiene sentido considerarse para expresar la medición.

## Redondeo de cifras significativas

Para eliminar las cifras no significativas se lleva a cabo un proceso de redondeo de acuerdo a la siguiente regla:

- Si la última cifra es menor que cinco, se suprime
- Si la última cifra es mayor o igual que cinco, se suprime la última y la anterior se incrementa en uno.

Ejemplos: 7.83 se redondea a 7.8; 3.14159 se redondea a 3.1416 y 0.35 se redondea a 0.4.

## Cifras significativas e incertidumbre fraccional

La incertidumbre fraccional está directamente relacionada con las cifras significativas. Considérese, por ejemplo, los números 10 y 9900 con dos cifras significativas. El 10 con dos cifras significativas significa

$$10 \pm 0.5 = 10 \pm 5\%$$

El número 9900 con dos cifras significativas significa

$$9900 \pm 50 = 9900 \pm 0.5 \%$$

Lo anterior muestra que, cuando se tiene dos cifras significativas, la incertidumbre fraccional ésta comprendida entre el 5% y el 0.5%.

La tabla muestra la relación entre el número de cifras significativas y la incertidumbre fraccional correspondiente.

<b>Correspondencia entre cifras significativas e incertidumbre fraccional</b>	
Número de cifras Significativas	Incertidumbre fraccional Correspondiente
1	5% - 50%
2	0.5% - 5%
3	0.05% - 0.5%
4	0.005% - 0.05%

## Equipo y Materiales

1. Una regla graduada en mm (de 30 cm de largo).
2. Un embudo.
3. Una probeta graduada en ml (de 100 ml de capacidad).
4. Una balanza (de 0.1gr de resolución).
5. Un prisma rectangular de aluminio.
6. Un vaso cilíndrico de acrílico.
7. Un soporte.
8. Un péndulo.
9. Un cronómetro.

## Procedimiento (primera parte)

Mediciones directas:

1. Mida las dimensiones del prisma: largo, alto y ancho.
2. Mida la masa del prisma (utilice una balanza).

Mediciones indirectas:

3. Calcule el área de las caras del prisma ( $A = \text{lado} \times \text{lado}$ ).
4. Calcule el volumen del prisma ( $V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$ ).
5. Calcule la densidad del prisma (densidad = masa / volumen).
6. Determine las incertidumbres asociadas a cada una de las mediciones directas e indirectas.
7. Exprese sus mediciones en la forma  $\bar{x} \pm \delta x$ .
8. Exprese sus mediciones utilizando cifras significativas.
9. Escriba todos sus resultados en la tabla I.



## Resultados

Tabla I					
Magnitud	Valor más probable	Incertidumbre	Incertidumbre relativa	Resultado	Cifras significativas
Largo (cm)					
Alto (cm)					
Ancho (cm)					
Masa (g)					
Área de una cara (cm <sup>2</sup> )					
Volumen (cm <sup>3</sup> )					
Densidad (g/cm <sup>3</sup> )					

## Preguntas

1. ¿Cómo se determina la incertidumbre de una medición directa?
2. ¿Cómo se determina la incertidumbre de una medición indirecta?
3. ¿Cómo podría reducir la incertidumbre en las mediciones reportadas en la tabla I?

## Procedimiento (segunda parte)

1. Para medir directamente el volumen del cilindro, llénelo totalmente con agua y con la probeta mida su volumen.
2. Determine la incertidumbre asociada a su medición.
3. Anote sus resultados en la tabla II.
4. Para medir indirectamente el volumen del mismo cilindro, mídale las dimensiones internas (diámetro y altura) y calcule el volumen empleando la fórmula  $V = \pi \frac{d^2}{4} h$

5. Determine la incertidumbre del volumen calculado, utilizando la expresión

$$\delta V = V \left( \frac{2\delta d}{d} + \frac{\delta h}{h} \right)$$

6. Anote sus resultados en la tabla II.

Tabla II			
Magnitud	Valor central $\bar{x}$	Incertidumbre $\delta x$	Resultado ( $\bar{x} \pm \delta x$ )
Volumen (ml) Medición directa			
Diámetro (cm)			
Altura (cm)			
Volumen (ml) Medición indirecta			

### Preguntas (primera parte)

1. ¿Si compara las mediciones, la directa y la indirecta, del volumen, qué observa?
2. ¿Qué medición es la más precisa?
3. ¿A qué se debe que la incertidumbre de la medición indirecta es mayor?

### Procedimiento (segunda parte)

1. Mida al menos diez veces el periodo  $T$  de un péndulo.
2. Calcule la media aritmética del periodo  $T$ .
3. Determine la desviación media de la medición del periodo.
4. Determine la desviación estándar de la medición del periodo.
5. Escriba todos sus resultados en la tabla III.

## Resultados

Tabla III	
Medición	Periodo
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Promedio	
Desviación Media	
Desviación Estándar	

### Preguntas (segunda parte)

1. ¿A qué atribuye que, en general, obtiene valores diferentes en las mediciones del periodo?
2. Exprese el resultado de su medición en la forma  $T \pm \delta T$ , utilizando la desviación media.
3. Exprese el resultado de su medición en la forma  $T \pm \delta T$ , utilizando la desviación estándar.
4. Si en lugar de 10 hiciera 100 mediciones ¿qué efecto tendrían los errores aleatorios en sus resultados?